



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ  
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

## **Учебное пособие**

### Часть 2

# **«Теоретическая механика. Динамика»**

Авторы  
Высоковский Д.А.,  
Кириллова Е.В.

Ростов-на-Дону, 2024

## Аннотация

Учебное пособие для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» является второй частью раздела динамика курса теоретической механики, и ее содержание предусматривает материал, который нужен для изучения сопротивления материалов, строительной механики и других строительных дисциплин. В основе ее лежит курс механики, читаемый авторами для студентов различных специальностей в АСА ДГТУ.

Учебное пособие рассчитано на студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

## Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»

Высоковский Д.А.

ст. преподаватель кафедры «Техническая механика»

Кириллова Е.В.



## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Динамика механической системы.....</b>	<b>5</b>
1.1. Введение в динамику механической системы.....	5
1.2. Связи. Число степеней свободы .....	7
1.3. Классификация сил, действующих на систему .....	10
1.4. Обобщенные координаты и обобщенные скорости .....	11
1.5. Момент инерции. ....	14
1.6. Теорема о движении центра масс системы. Дифференциальные уравнения движения системы. ....	18
1.7. Главный момент количеств движения механической системы (кинетический момент системы) .....	21
1.8. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы.....	27
1.9. Кинетическая энергия системы. ....	33
1.10. Некоторые случаи вычисления работы. ....	38
1.11. Теорема об изменении кинетической энергии системы. ....	40
<b>2. Аналитическая механика .....</b>	<b>45</b>
2.1. Принцип возможных перемещений .....	45
2.2. Общее уравнение динамики.....	52
2.3. Принцип Даламбера для системы. ....	53
2.4. Уравнения Лагранжа второго рода. ....	59
2.5. Элементы теории удара. ....	67

## ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Динамика» завершает изучение курса теоретической механики, на материале которой изучаются дисциплины «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Теория механизмов и машин», «Строительная механика», «Основы конструирования машин», ряда специальных инженерных дисциплин, где изучаются процессы обработки металлов давлением, механическое оборудование, автоматическое управление, автоматизация и комплексная механизация различных объектов, осуществление технологических процессов и так далее.

Данное учебное пособие предназначено для обучающихся по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» по направлению 08.03.01 «Строительство» при изучении следующих тем дисциплин:

- динамика системы;
- аналитическая механика.

Раздел «Динамика» завершает формирование минимума знаний, необходимых специалисту для понимания механических явлений, и в то же время вырабатывает материалистическое мировоззрение.

Материал способствует овладению теоретическими основами компетенций, формирование которых предусмотрено Рабочей программой дисциплины для направления подготовки «Строительство».

## 1. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

### 1.1. Введение в динамику механической системы.

Механической системой материальных точек или тел называется такая совокупность, в которой положение или движение каждого элемента зависит от положения или движения всех остальных элементов системы.

Конфигурация механической системы в данный момент ее движения характеризуется центром масс и моментами инерции точек.

Центром масс (центром инерции) данной механической системы называется геометрическая точка  $C$ , положение которой определяется по формуле

$$M\bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k,$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – массы точек системы,  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4, \dots, \bar{r}_n$  –

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

радиус векторы точек в данный момент времени,

масса всей системы, а  $\bar{r}_c$  – радиус-вектор центра масс системы.

Моментом инерции системы материальных точек относительно точки  $O$  или оси  $I$  называется сумма произведений масс точек на квадраты их расстояний до точки  $O$  или прямой  $I$ . Так, например, если  $m_1, m_2, \dots, m_n$  – массы точек системы, а  $h_1, h_2, \dots, h_n$  – расстояния их до оси  $Oz$ , то осевой момент инерции этой системы в данный момент времени

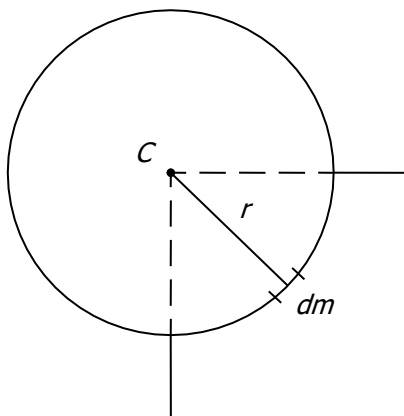


Рис. 1

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2$$

В случае бесконечного множества элементарных материальных точек системы, т.е. В случае твердого тела, равенство принимает интегральную форму. Например, момент инерции однородного тонкого кольца радиуса  $r$  и массы  $m$  относительно его центра масс  $C$  (рис. 1)

$$J_z = \int r^2 dm = r^2 \int dm = r^2 m$$

Момент инерции однородного тонкого диска радиуса  $R$  и массы  $M = \pi \rho R^2$  (рис. 2)

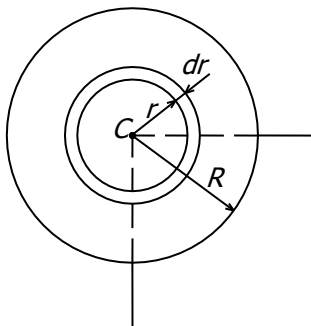


Рис. 2

$$J_c = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2}.$$

## 1.2. Связи. Число степеней свободы

Определяющим признаком механической системы является наличие связей между отдельными ее материальными точками или телами.

Условия, ограничивающие свободу движения точек или тел механической системы, называются связями.

Если положение и перемещения точек системы подчиняются некоторым заранее данным условиям геометрического характера, то такие связи называются геометрическими.

Простейшим примером такой связи является невесомый тонкий стержень соединяющий две материальные точки. Такую же систему с геометрическими связями представляет собой абсолютно твердое тело, расстояния между точками которого остаются постоянными; такая система называется неизменяемой.

Геометрические связи могут быть выражены в виде уравнений между координатами точек данной системы. Так, например, для системы, состоящей из двух точек  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , соединенных твердым стержнем длины  $l$ , связь состоит в том, что расстояние между этими точками остается постоянным. Уравнение связи имеет вид:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Это уравнение дает возможность выразить любую из шести координат через остальные. В этом случае говорят, что система имеет пять степеней свободы. Число степеней свободы равно числу независимых координат.

Для кривошипно-шатунного механизма (рис. 3) будем иметь

Три уравнения связей между четырьмя координатами точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ :

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2; (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2; y_2 = 0.$$

Эти уравнения дают возможность выразить одну координату через остальные. Система кривошипно-шатунного механизма имеет одну степень свободы.

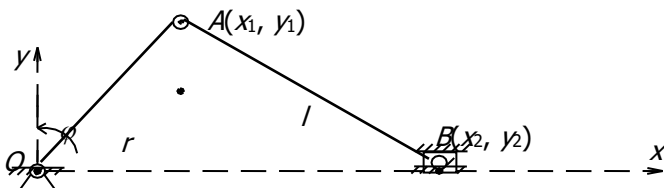


Рис. 3

Для плоского механизма  $O_1ABO_2$  (рис. 4) легко получить три уравнения связей точек  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ :

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2; (x_2 - a)^2 + y_2^2 = l_3^2; (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

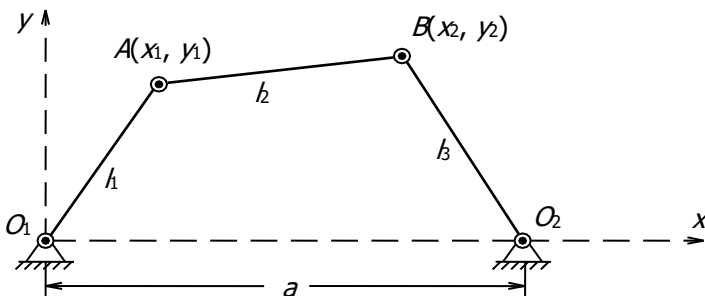


Рис. 4



Эти уравнения связывают между собой четыре координаты  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Система имеет одну степень свободы.

Теперь рассмотрим двойной плоский маятник (рис. 5).

Уравнения связей имеют вид:

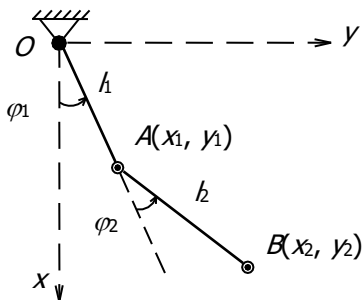


Рис. 5

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2, (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2.$$

Эти два уравнения связывают четыре координаты. Двойной плоский маятник имеет две степени свободы.

Заметим еще, что все рассмотренные в примерах связи выражены в форме равенств. Такие геометрические связи называются удерживающими.

В общем случае системы, состоящей из  $n$  материальных точек с  $3n$  координатами, будем иметь  $s$  уравнений связей вида

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ f_s(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0. \end{aligned}$$

При этом число  $s$  должно быть меньше  $3n$ , так как при  $s=3n$  координаты всех точек системы определились бы из уравнений связей и, следовательно, имели бы некоторые постоянные значения, а потому система не могла бы двигаться.

Если в уравнения связей не входит время  $t$ , то связи называются стационарными; если же число аргументов функции  $f$  входит

время  $t$ , то связи называются нестационарными. Уравнения нестационарных удерживающих геометрических связей имеют вид

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1 + t)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 &= l^2; \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= (R + t)^2.\end{aligned}$$

В дальнейшем будем иметь в виду только стационарные геометрические связи.

Геометрические связи налагают некоторые ограничения на положение точек системы, так что это положение не может быть вполне произвольным. Математически это выражается в том, что не все  $3n$  координат точек системы являясь независимыми друг от друга, так как из  $s$  уравнений связей мы можем  $s$  каких-нибудь координат (например,  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$ ) выразить через остальные  $3n - s$  координат. Таким образом, только  $3n - s$  координат можно рассматривать как независимые переменные, которые могут принимать произвольные значения; остальные  $s$  координат определяются из уравнений связей как функции этих независимых переменных. Число независимых переменных определяет число степеней свободы данной механической системы.

При решении задач число степеней свободы системы в большинстве случаев легко определить методом остановки.

Например, если в кривошипно-шатунном механизме (см. рис. 4) остановить кривошип  $OA$  или поршень  $B$ , то остальные элементы не смогут перемещаться, а потому механизм имеет одну степень свободы. Двойной маятник (см. рис. 5) имеет две степени свободы, так как он не будет перемещаться при фиксированных углах  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

### 1.3. Классификация сил, действующих на систему

Все силы, действующие на материальные точки данной системы, классифицируются на внутренние, т.е. Силы с которыми материальные точки данной системы действуют друг на друга, и внешние, т.е. Силы, с которыми действуют на данную систему тела или материальные точки, не принадлежащие к этой системе.

Силы, с которыми действуют друг на друга материальные частицы твердого тела, являются по отношению к этому телу внутренними силами.

Внутренние силы согласно закону равенства действия и противодействия всегда попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

Если выделить из данной системы какую-нибудь часть ее и рассматривать эту часть как отдельную систему, то силы, являющиеся внутренними для всей системы, могут оказаться внешними по отношению к этой выделенной части.

### 1.4. Обобщенные координаты и обобщенные скорости

Обобщенными (лагранжевыми) координатами данной механической системы называются такие независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно в любой момент определить положение этой системы и, следовательно, выразить декартовы координаты всех ее точек через параметры. Удачный выбор обобщенных координат может иногда значительно облегчить решение задачи.

Число этих независимых параметров равно числу степеней свободы данной системы.

Рассмотрим, например, кривошипно-шатунный механизм (см.рис. 4). Положение этого механизма, очевидно, вполне определяется одним параметром: углом поворота  $\varphi$  кривошипа. Координаты точек  $A$  и  $B$  выражаются через  $\varphi$  следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \varphi; \quad y_1 = r \cos \varphi; \\x_2 &= r \sin \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}; \quad y_2 = 0.\end{aligned}$$

Теперь обратимся к двойному маятнику (рис. 5), который имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат можно выбрать углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Тогда выражения декартовых координат точек  $A$  и  $B$  принимают вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \cos \varphi_1; \quad y_1 = l_1 \sin \varphi_1; \\x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \\y_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}$$

В общем случае системы, состоящей из  $n$  материальных точек и имеющей  $s$  степеней свободы, обобщенные координаты обозначаются так:  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$

Все декартовы координаты точек системы могут быть выражены через обобщенные координаты, число которых равно числу степеней свободы:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \\x_2 &= x_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \dots, \\x_n &= x_n(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \\y_1 &= y_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \\y_2 &= y_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \dots, \\y_n &= y_n(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \\z_1 &= z_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \\z_2 &= z_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s), \dots, \\z_n &= z_n(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s),\end{aligned}$$

Так как радиус-вектор  $\vec{r}_k$  каждой точки системы выражается вектором  $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k}$ , то, следовательно, радиус-вектор каждой точки тоже является функцией, но векторной, от обобщенных координат

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_s) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

В связи с этим, формулы принимают вид:

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin q, \quad y_1 = r \cos q, \\x_2 &= r \sin q + \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 q}, \quad y_2 = 0, \\x_1 &= l_1 \cos q_1, \quad y_1 = l_1 \sin q_1, \\x_2 &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2),\end{aligned}$$

$$y_2 = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2).$$

При движении механической системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться, и закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1(t); q_2 = f_2(t), \dots, q_s = f_s(t).$$

Эти уравнения представляют собой кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Производные от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями. Обобщенные скорости обозначаются символами:

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_s$$

Понятие об обобщенной скорости охватывает все введенные в кинематике понятия о скоростях. Так, если обобщенная координата – величина линейная, т.е.  $x$  или  $s^*$ , то обобщенной скоростью будет линейная скорость. Если обобщенная координата – угол, то соответствующей обобщенной скоростью будет угловая скорость.

В качестве примера приведем кинематическое решение задачи о движении центрального кривошипно-шатунного механизма (см. рис. 4) при любом законе изменения обобщенной координаты  $q$ .

Дифференцируя формулы получим:

$$V_x = \dot{x}_1 = r\dot{q} \cos q; \quad V_y = \dot{y}_1 = -r\dot{q} \sin q;$$

$$V_B = \dot{x}_2 = r\dot{q} \cos q + r\dot{q} \cos q \frac{r \sin q}{\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 q}}.$$

Угловую скорость  $\omega_{AB}$  в каждый данный момент времени движения определим по формуле

$$\omega_{AB} = \frac{|\bar{v}_B - \bar{v}_A|}{l}.$$

Вычисление приводит к результату

$$\omega_{AB} = \frac{r\dot{q} \sin q}{\sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 q}}.$$

Окончательно имеем:

$$BC_v = \frac{v_B}{\omega_{AB}} = r \cos q + ctg(q) \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 q}.$$

## 1.5. Момент инерции.

### 1.5.1. Момент инерции тела относительно оси, радиус инерции.

При исследовании движений системы недостаточно знать ее массу и положение центра масс, необходимо определять и другие характеристики распределения масс.

Движение тел существенным образом зависит от величины и характера распределения масс. Так, например, величина массы тела непосредственно характеризует инертность при его поступательном движении. При вращательном движении мерой инертности тела является его момент инертности относительно оси вращения, определяющей характер распределения масс.

Моментом инерции механической системы (тела) относительно точки  $O$  (полярным моментом инерции) называется сумма произведений масс всех точек системы на квадрат их расстояния до точки  $O$  :

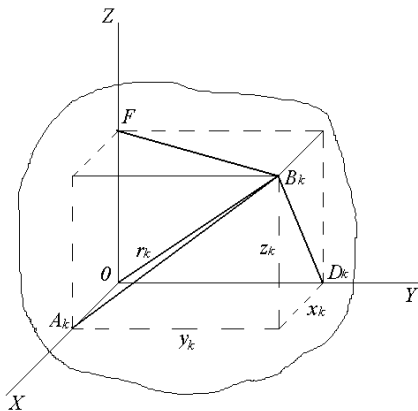


Рис. 6

$$Y_0 = \sum m_k r_k^2$$

$$Y_0 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$$

Моментом инерции системы (тела) относительно оси  $(x, y, z)$  называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек системы (тела) на квадраты их расстояний до этой оси.

$$Y_x = \sum m_k (A_k B_k)^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

$$Y_y = \sum m_k (B_k D_k)^2 = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2)$$

$$Y_z = \sum m_k (B_k F_k)^2 = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2)$$

### 1.5.2. Момент инерции системы (тела) относительно плоскости

$$Y_{xoy} = \sum m_k Z_k^2$$

$$Y_{yoz} = \sum m_k X_k^2$$

$$Y_{zox} = \sum m_k Y_k^2$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 Y_x + Y_y + Y_z &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \sum m_k (z_k^2 + y_k^2) + \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) = \\
 &= \sum m_k (2z_k^2 + 2x_k^2 + 2y_k^2) = \underbrace{2 \sum m_k (z_k^2 + x_k^2 + y_k^2)}_{Y_0} = 2Y_0
 \end{aligned}$$

$$Y_x + Y_y + Y_z = 2Y_0$$

Момент инерции тела относительно оси можно представить в виде произведения массы тела на квадрат радиуса инерции тела относительно этой оси:

$$Y_z = M \rho_{ин}^2$$

Радиус инерции равен расстоянию от оси до той точки, в которой надо мысленно сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Теорема Гюйгенса.

Теорема. Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между этими осями

$$Y_{z_1} = Y_z + Md^2$$



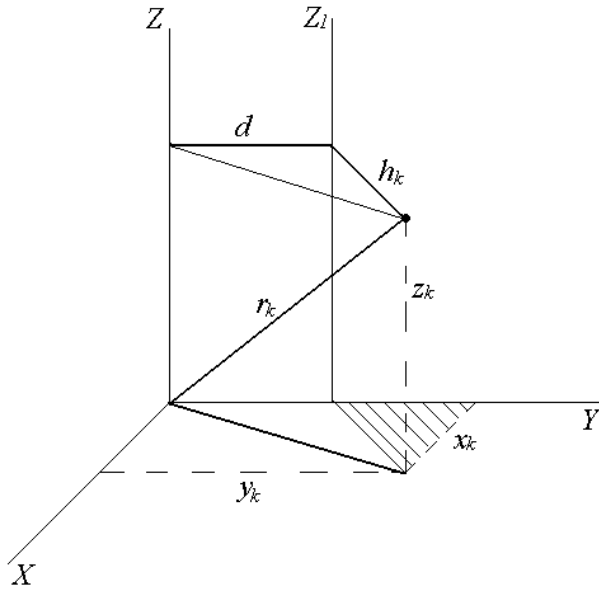


Рис. 7

Доказательство

$$Y_z = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) \quad (1)$$

$$Y_{z1} = \sum m_k h_k^2 \quad (2)$$

Из  $\Delta$ .  $h_k^2 = x_k^2 + (y_k - d)^2 = x_k^2 + y_k^2 - 2kd - d^2$

Подставляем  $h_k^2$  и получаем

$$Y_{z1} = \underbrace{\sum m_k (x_k^2 + y_k^2)}_{Y_z} - 2d \sum m_k y_k - \underbrace{\sum m_k d^2}_{Md^2}$$

$$2d \sum m_k y_k = 0 \quad \text{т.к.}$$

$$2d \sum m_k y_k = M y_c \quad \text{из} \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$y_c = 0 \quad (\text{т.к. Ось } z \text{ проходит через центр масс})$$

Следовательно

$$Y_{z1} = Y_z + M d^2$$

Теорема доказана

## 1.6. Теорема о движении центра масс системы. Дифференциальные уравнения движения системы.

### 1.6.1. Дифференциальные уравнения движения системы.

Под материальной системой понимают совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

Массой  $M$  материальной системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему.

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

где  $m_k$  – масса,  $k$ -й точки системы,  $n$ -число всех точек системы.

Центром масс называется геометрическая точка, радиус-вектор которой  $\bar{r}_c$  Определяется равенством:

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k$$

$\bar{r}_k$  – радиус-вектор,  $k$ -й точки системы относительно неподвижного центра.

Напомним, что все силы, приложенные к материальной системе, можно разделить на две группы: внешние и внутренние. Внешними называются силы взаимодействия материальной системы с телами, не входящими в систему. Обозначаются они с верх-

ним индексом «е» ( $\bar{F}_k^{(e)}$ ). Внутренние силы – это силы взаимодействия между точками одной системы. Обозначаются они с верхним индексом «i» ( $\bar{F}_k^{(i)}$ ).

В зависимости от выбора материальной системы одна и та же сила может быть как внешней, так и внутренней. Например, в системе вал-подшипник сила взаимодействия между валом и подшипником – внутренняя, а если материальной системой считать один вал, то реакция подшипника – сила внешняя.

Рассмотрим систему, состоящую из «n» материальных точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Будем обозначать их, как массы,  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

Пусть  $\overline{F}_k^{(e)}$  и  $\overline{F}_k^{(i)}$  – равнодействующие сил, приложенных к k-й точке.

Применяя к каждой точке второй закон Ньютона, можно записать:

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^{(e)} + \overline{F}_k^{(i)} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Или, проецируя на оси декартовых координат, получаем:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= X_k^{(e)} + X_k^{(i)} \\ m_k \ddot{y}_k &= Y_k^{(e)} + Y_k^{(i)} \\ m_k \ddot{z}_k &= Z_k^{(e)} + Z_k^{(i)} \quad (k=1,2,\dots,n) \end{aligned}$$

Проекция сил могут в общем случае зависеть от времени, от координат, от скоростей точек системы. Уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменных  $x_k, y_k, z_k$ . Для системы n точек число уравнений равно  $3n$ .

Задача динамики системы состоит в том, чтобы, зная массы точек системы и действующие на точки силы, определить закон движения каждой точки системы, т.е. Найти  $x_k, y_k, z_k$  в виде функции времени.

Математически это сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений.  $6n$  произвольных постоянных, которые появятся при интегрировании, можно найти из начальных условий, задавая значения координат и скоростей точек в начальный момент.

Сложность использования дифференциальных уравнений движения состоит прежде всего в том, что мы не знаем, как правило, аналитического выражения внутренних сил и реакций связи.

Поэтому в теоретической механике разработаны методы, которые позволяют обойти эти трудности. Основная идея этих методов в том, что вместо детального изучения движения каждой точки системы изучаются движения некоторых интегральных характеристик всей системы в целом. В этом случае движение механической системы изучается с помощью общих теорем механики.

### 1.6.2. Теорема о движении центра масс системы.

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены внешние силы, действующие на систему:

$$M\bar{a}_c = \bar{R}^{(e)}$$

В проекциях на оси координат имеет вид

$$M\ddot{x}_c = R_x^{(e)}$$

$$M\ddot{y}_c = R_y^{(e)}$$

$$M\ddot{z}_c = R_z^{(e)}$$

#### Следствие 1

Теорема о движении центра масс описывает поступательное движение системы.

#### Следствие 2

Одними внутренними силами нельзя изменить движение центра масс системы.

#### Следствие 3

Если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то скорость центра масс остается постоянной по величине и направлению:

$$\bar{R}^{(e)} = 0 \rightarrow \bar{a}_c = 0 \rightarrow \bar{v}_c = \overline{const}$$

#### Следствие 4

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс на эту ось остается постоянной во все время движения:  $R_x^{(e)} = 0 \rightarrow v_{cx} = const$

## 1.7. Главный момент количеств движения механической системы (кинетический момент системы)

Кинетическим моментом  $\bar{L}_0$  механической системы, состоящей из  $n$  материальных точек, относительно данного центра  $O$ , называется вектор, приложенный в центре  $O$  и равный геометрической сумме моментов количеств движения каждой материальной точки этой системы относительно того же центра

$$\bar{L}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k.$$

Аналогично определяются кинетические моменты  $L_x, L_y, L_z$  механической системы относительно координатных осей.

$$L_x = \sum_{k=1}^n m_x (m_k \bar{v}_k), \quad L_y = \sum_{k=1}^n m_y (m_k \bar{v}_k),$$

$$L_z = \sum_{k=1}^n m_z (m_k \bar{v}_k),$$

Т.е. Кинетический момент механической системы относительно данной оси равен алгебраической сумме моментов количеств движения каждой материальной точки этой системы относительно этой же оси.

Для сплошной механической системы (твердое тело, жидкость, газ и т.д.) В правые части полученных формул вместо конечных сумм будут входить соответствующие кратные интегралы.

### 1.7.1. Кинетический момент поступательно движущегося тела

Пусть твердое тело движется поступательно со скоростью  $v$ . Разобьем тело на  $n$  малых элементов с массой  $\Delta m_k$  каждый.

$$\bar{L}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \Delta m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \bar{r}_k \times \bar{v}_k.$$

Учитывая, что  $\bar{v}_k = \bar{v}$ ,  $\sum_{k=1}^n \Delta m_k \bar{r}_k = m \bar{r}_c$ , где  $m$  – масса тела;  $\bar{r}_c$  – радиус – вектор центра тяжести, получим

$$\bar{L}_0 = m \bar{r}_c \times \bar{v} = \bar{r}_c \times m \bar{v} = \bar{m}_0 (m \bar{v}_c),$$

где  $\bar{v} = \bar{v}_c$  – скорости центра тяжести тела (рис. 8).

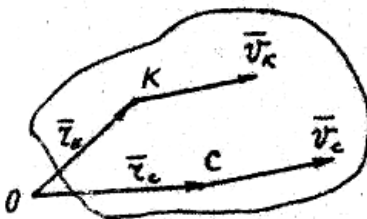


Рис. 8

Центра тяжести тела в предположении, что в этом центре сосредоточена вся его масса.

*При поступательном движении твердого тела его кинетический момент относительно любой точки равен моменту относительно этой точки вектора количества движения*

### 1.7.2. Кинетический момент твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Разобьем тело на  $n$  малых элементов массы  $\Delta m_k$  каждый и найдем скорость такого элемента

$$v_k = \omega h_k,$$

где  $h_k$  – расстояние  $k$ -й точки до оси вращения;

$\omega$  – угловая скорость тела

$$L_z = \lim_{\substack{\Delta m_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n m_k (\Delta m_k \bar{v}_k) = \lim_{\substack{\Delta m_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \omega \Delta m_k h_k^2 = \omega \lim_{\substack{\Delta m_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n m_k h_k^2.$$

Предел последней интегральной суммы называется моментом инерции тела относительно оси  $z$  и обозначается  $L_z$ .

$$J_z = \lim_{\substack{\Delta m_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n \Delta m_k h_k^2.$$

Моментом инерции тела относительно данной оси называется предел суммы произведений массы каждой материальной частицы тела на квадрат ее расстояния от этой оси.

$$L_z = J_z \omega.$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси вращения равен произведению угловой скорости тела на момент инерции его относительно оси вращения.

### 1.7.3. Кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной точки

$$\begin{aligned} \bar{L}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k &= \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ m_k v_{kx} & m_k v_{ky} & m_k v_{kz} \end{vmatrix} = \bar{i} \sum_{k=1}^n m_k (y_k v_{kx} - z_k v_{ky}) + \\ &+ \bar{j} \sum_{k=1}^n m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) + \bar{k} \sum_{k=1}^n m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx}). \end{aligned}$$

Если тело имеет одну неподвижную точку, то скорость его любой точки

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k,$$

где  $\bar{\omega}$  – угловая скорость.

Выражения для проекций скорости имеет вид

$$\bar{v}_k = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_y z_k - \omega_z y_k) + \bar{j}(\omega_x z_k - \omega_z x_k) + \bar{k}(\omega_x y_k - \omega_y x_k),$$

$$v_x = \omega_y z_k - \omega_z y_k, v_y = \omega_z x_k - \omega_x z_k, v_z = \omega_x y_k - \omega_y x_k,$$

где  $x_k, y_k, z_k$  – координаты рассматриваемой точки.

Подставляя проекции скорости (11) в формулу (10) и переходя от суммы к интегралу, получим

$$L_x = \int [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_z x - \omega_x z)] dm =$$

$$= \int [\omega_x (y^2 + z^2) - \omega_y xy - \omega_z xz] dm.$$

Так как  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  не зависят от переменной интегрирования, то

$$L_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm.$$

В этом равенстве

$J_x = \int (y^2 + z^2) dm$  – момент инерции твердого тела относительно оси  $x$ ;

$J_{xy} = \int xy dm, J_{xz} = \int xz dm$  – центробежные моменты инерции.

Проделав аналогичные выкладки с выражениями  $L_y$  и  $L_z$ , получим

$$L_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z;$$

$$L_y = -J_{xy} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z;$$

$$L_z = -J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_z \omega_z.$$



Если оси координат, имеющие начало в неподвижной точке  $O$  тела, будут главными осями инерции тела, то  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$  и формула примет вид

$$L_x = J_x \omega_x, L_y = J_y \omega_y, L_z = J_z \omega_z.$$

Формулы определяют проекции момента количеств движения абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку на оси координат, жестко связанные с телом.

Частный случай: тело вращается вокруг неподвижной оси  $z$ , в этом случае

$$\omega_x = 0, \omega_y = 0, \omega_z = \omega, \\ L_x = -J_{xy} \omega, L_y = -J_{yz} \omega, L_z = J_z \omega.$$

#### 1.7.4. Кинетический момент системы, участвующей в сложном движении

Во многих случаях движение материальной системы относительно инерциальных осей рационально представить как сложное и разложить его на простейшие движения.

Введем подвижные координатные оси  $O_1x_1y_1z_1$ , перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей  $O_0x_0y_0z_0$ .

Начало отсчета подвижной системы совместим с центром масс материальной системы. Будем рассматривать движение материальной системы как сложное, тогда скорость  $k$ -й точки системы будет геометрической суммой переносной и относительной скоростей

$$\bar{v}_k = \bar{v}_k^e + \bar{v}_k^r.$$

Так как переносное движение – поступательное, то  $\bar{v}_k^e = \bar{v}_c$ .

Пусть радиус – вектор  $k$ -й точки относительно неподвижного начала координат  $\bar{R}_k$ ; относительно подвижного –  $\bar{r}_k$ ;  $\bar{R}_c$  – радиус – вектор подвижного начала координат (центра масс) относительно неподвижного.

$$\bar{R}_k = \bar{R}_c + \bar{r}_k;$$

$$\begin{aligned} \bar{L}_{0_1} &= \sum_{k=1}^n \bar{R}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{R}_c + \bar{r}_k) \times m_k (\bar{v}_c + \bar{v}_k^r) = \\ &= \bar{R}_c \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_c + \bar{R}_c \times \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k^r + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k m_k \times \bar{v}_c + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{v}_k^r m_k. \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k = m$$

Учитывая, что – масса всей системы,

$$\sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k^r = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k = \frac{d}{dt} m \bar{r}_c = 0,$$

Получим

$$\bar{L}_{0_1} = \bar{m}_{0_1} (m \bar{v}_c) + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k^r.$$

Второе слагаемое есть кинетический момент относительного движения системы относительно центра масс

$$\bar{L}_{0_1} = \bar{m}_{0_1} (m \bar{v}_c) + \bar{L}_c^r.$$

Кинетический момент абсолютного движения  $\bar{L}_{0_1}$  относительно неподвижного центра  $O_1$  равен сумме момента относительно того же центра количества движения центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена вся ее масса, и кинетического момента системы в ее относительном движении по отношению к поступательно перемещающимся

координатным осям, начало которых совпадает с центром масс системы.

### 1.7.5. Кинетический момент тела, совершающего плоское движение

Будем рассматривать плоское движение тела как сложное. За переносное примем поступательное движение тела со скоростью, равной скорости центра масс, за относительное-вращательное движение относительно оси, перпендикулярной плоской фигуре и проходящей через центр масс.

Тогда из формулы (16) получим

$$L_{Oz} = m_z (m \bar{v}_c) + J_{cz} \omega.$$

### 1.8. Теорема об изменении главного момента количеств движения системы

Кинетический момент системы изменяется с течением времени. Найдем это изменение

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum_{k=1}^n \frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \bar{v}_k + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k.$$

Учитывая, что первое слагаемое равно нулю (векторное произведение параллельных векторов), и заменяя  $m_k \bar{a}_k$  по формулам  $m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , получим

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times (\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i),$$

Где  $\bar{F}_k^e$  и  $\bar{F}_k^i$  – соответственно равнодействующая всех внешних и внутренних сил, действующих на точку;  $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e = \bar{M}_0^e$  – главный момент внешних сил относительно центра  $O$ ;

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = \bar{M}_0^i$$

– главный момент внутренних сил относительно центра  $O$ . Раньше было доказано, что  $\bar{M}_0^i = 0$ .  
Окончательно получаем

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{M}_0^e.$$

Это уравнение выражает теорему об изменении кинетического момента для системы: производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси  $x, y, z$ , получим

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e.$$

Рассмотрим кинетическую интерпретацию этой теоремы. Если конец переменного вектора  $\bar{L}_0$  обозначить через  $A$ , то про-

изводная  $\frac{d\bar{L}_0}{dt}$  выразит скорость точки  $A$ , т.е.  $\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \bar{v}_A$  и будем иметь

$$\bar{v}_A = \bar{M}_0^e.$$

Полученное равенство выражает теорему резалья.

Скорость конца переменного вектора, изображающего кинетический момент системы относительно данного неподвижного центра, равна главному моменту относительно того же центра внешних сил, действующих на систему.

Из теоремы об изменении кинетического момента вытекает несколько следствий:

1. Внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента материальной системы (они могут оказывать косвенное влияние через внешние силы).

2. Если главный момент внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент материальной системы относительно того же центра не изменяется по модулю и направлению.

Действительно, если  $\overline{M}_0^e = 0$ , то уравнение (17) принимает вид

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = 0,$$

Отсюда

$$\overline{L}_0 = \overline{L}_0(0) = \overline{const},$$

где  $\overline{L}_0(0)$  – начальное значение вектора  $\overline{L}_0$ .

3. Если  $\overline{M}_0^e \neq 0$ , но  $M_x^e = 0$ , то кинетический момент материальной системы относительно оси  $X$  есть величина постоянная.

$$L_x = L_x(0) = const,$$

где  $L_x(0)$  – начальное значение  $L_x$ .

Второе и третье следствия называются законами сохранения главного момента количеств движения материальной системы.

### Энергия.

Мерой поступательного движения является импульс тела, но эта характеристика не универсальная. Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является **энергия**. Формы энергии: механическая, тепловая, электрическая, ядерная, внутренняя и др. Энергия из одной формы может переходить в другую. **Энергия механической системы** количественно характеризует ее с точки зрения возможных количе-

ственных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы между собой и с внешними телами. Таким образом, движение и энергия неразрывно связаны между собой, а т.к. Движение является неотъемлемой частью материи, то всякое тело обладает какой-либо энергией.

**Кинетической энергией** тела называют энергию, являющуюся мерой его механического движения и определяемую работой, которую надо совершить, чтобы вызвать это движение.

Если под действием силы  $\vec{F}$  тело из состояния покоя приходит в движение со скоростью  $\vec{V}$ , то будет совершаться работа, и энергия тела возрастает на величину затраченной работы:

$$dA = \vec{F} d\vec{r}$$

где  $d\vec{r}$  – перемещение;  $da$  – элементарная работа.

С учетом скалярной записи второго закона Ньютона:

$$F = ma = m \frac{dV}{dt}$$

Получим

$$dA = mVdV$$

А так как совершаемая работа равна приращению энергии, то

$$dA = dE_k = mVdV$$

Полная энергия находится путем интегрирования, при изменении скорости от 0 до некоторого значения  $V$ :

$$E_k = \int_0^V mVdV = \frac{mV^2}{2}$$

**Кинетическая энергия всегда положительна.** Кинетическая энергия системы материальных точек равна алгебраической сумме кинетических энергий всех материальных точек системы.

Кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

Кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета, т.к. В различных инерциальных системах отсчета скорость неодинакова.

**Потенциальная энергия** – часть общей механической энергии системы, определяемая взаимным расположением тел, действующих друг на друга.

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется **силовым полем**.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции  $u = u(x, y, z)$ . Если она не зависит от времени, то такое поле называется **стационарным**. Если во всех точках она одинакова, то поле – **однородное**.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

То такое поле называется **потенциальным**.

Если работа зависит от траектории, то силы называются **диссипативными** (сила трения).

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения  $M_1$  в положение  $M_2$ . (рис. 9).

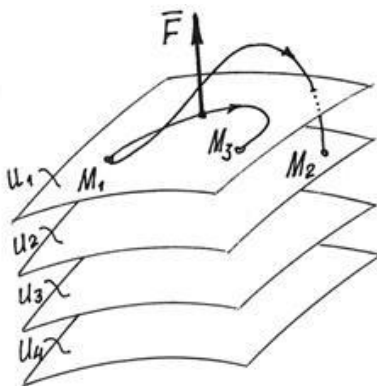


Рис.9

Элементарная работа:

$$dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du$$

Это есть полный дифференциал силовой функции.  
Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

где  $u_2$  и  $u_1$  – значения силовой функции в точках  $M_2$  и  $M_1$ .

**Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.**

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы  $\vec{F}$  будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку  $M_3$ , если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это слоеное пространство, состоящее из таких поверхностей (рис. 9). Эти поверхности называются **поверхностями уровня** или **экипотенциальными поверхностями**. Уравнения их:  $u(x, y, z) = C$  ( $C$  – постоянная, равная значению  $u$  в точках этой поверхности). А силовую функцию называют, соответственно, **потенциалом поля**.

Конечно, экипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку, при перемещении точки по экипотенциальной поверхности работа силы  $\vec{F}$  равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее  $u = u_0$ ).

**Работа, которую совершит сила  $\vec{F}$  при переходе точки из определенного места  $M$  на нулевую поверхность, называют потенциальной энергией точки в этом определенном месте  $M$ :**

$$E_n = A = u_0 - u$$



Если тело находится в потенциальном поле сил, то оно будет обладать потенциальной энергией. Потенциальную энергию тела, связанного с нулевым уровнем системы отсчета, принимают нулевой, а энергию других положений отсчитывают относительно нулевого уровня.

Силовая функция  $u = u_0 - E_n$ . Поэтому проекции силы на декартовы оси равны

$$X = \frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial E_n}{\partial z}$$

и вектор силы

$$\vec{F} = \frac{\partial E_n}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \vec{k} = -\text{grad} E_n$$

**Полная механическая энергия системы** равна энергии механического движения и энергия взаимодействия:

$$E_{\text{Полн}} = E_k + E_n = \text{Const}$$

Полная механическая энергия тела при его перемещении вдоль любой траектории в потенциальном поле остается постоянной.

## 1.9. Кинетическая энергия системы.

**Кинетической энергией системы называется скалярная величина  $T$ , равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы**

$$E_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$E_k = \sum E_{ki}$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. **Поступательное движение.** В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. То есть, для любой точки  $V_i = V_c$

$$E_k^{\text{Пост}} = \sum \frac{m_i v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_i \quad \text{Или} \quad E_k^{\text{Пост}} = \frac{M v_c^2}{2}$$

Таким образом, **кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.** От направления движения значение  $T$  не зависит.

2. **Вращательное движение.** Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси  $Oz$  (см. Рис.177), то скорость любой его точки  $v_i = \omega h_i$  Где  $h_i$ - расстояние точки от оси вращения, а  $\omega$  - угловая скорость тела. Подставляя это значение и вынося общие множители за скобку, получим:

$$E_k^{\text{Вращ}} = \sum \frac{m_i \omega^2 h_i^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i h_i^2$$

Величина суммы представляет собою момент инерции тела относительно оси  $z$ . Таким образом, окончательно найдем:

$$E_k^{\text{Вращ}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Т.е. **Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.** От направления вращения значение  $T$  не зависит.

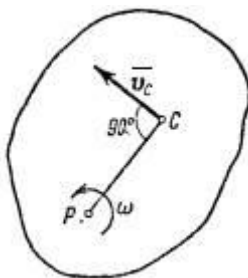


Рис.10

При вращении тела вокруг неподвижной точки кинетическая энергия определяется как (рис.10)

$$E_k^{\text{Вращ}} = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции тела относительно главных осей инерции  $x_1, y_1, z_1$  в неподвижной точке  $O$ ;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора мгновенной угловой скорости  $\vec{\omega}$  на эти оси.

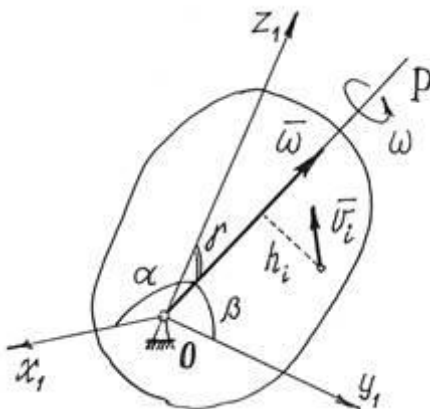


Рис.11

3. **Плоскопараллельное движение.** При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распре-

лены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей  $P$  (рис. 11). Следовательно

$$E_k^{\text{Плоск}} = \frac{1}{2} I_p \omega^2$$

где  $I_p$  – момент инерции тела относительно названной выше оси,  $\omega$  – угловая скорость тела. Величина  $I_p$  в формуле будет переменной, так как положение центра  $P$  при движении тела все время меняется. Введем вместо  $I_p$  Постоянный момент инерции  $I_c$ , относительно оси, проходящей через центр масс  $C$  тела. По теореме Гюйгенса-Штейнера  $I_p = I_c + Md^2$ , где  $d=PC$ . Подставим это выражение для  $I_p$ . Учитывая, что точка  $P$  – мгновенный центр скоростей, и, следовательно,  $\omega d = \omega PC = V_c$ , где  $V_c$  – скорость центра масс  $C$ , окончательно найдем:

$$E_k^{\text{Плоск}} = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2$$

**Следовательно**, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4) Для самого **общего случая движения** материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить **теорема Кенига**.

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис.12). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс  $C$  и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей  $x_1, y_1, z_1$ . Тогда скорость точек  $\vec{V}_i = \vec{V}_{ei} + \vec{V}_{ri}$ . Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны  $\vec{V}_c$ . Значит,  $\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{ri}$  И кинетическая энергия будет

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_c + \vec{V}_{ri})^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (V_c^2 + 2\vec{V}_c \vec{V}_{ri} + V_{ri}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i V_c^2 + \sum m_i \vec{V}_c \vec{V}_{ri} + \frac{1}{2} \sum m_i V_{ri}^2 = \\ &= \frac{1}{2} M V_c^2 + \vec{V}_c \sum m_i \vec{V}_{ri} + E_r \end{aligned}$$

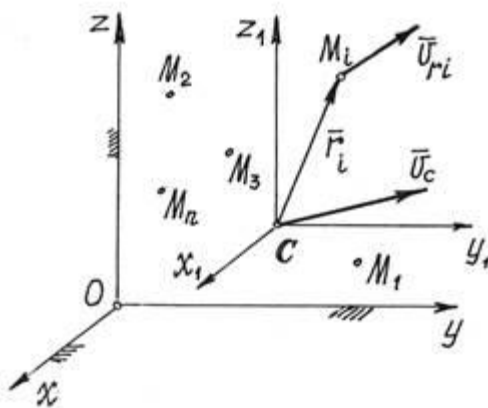


Рис.12

По определению центра масс его радиус-вектор в подвижной системе равен нулю, его производная по времени также равна нулю. Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$E_k = \frac{1}{2}MV_c^2 + E_r$$

**Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.**

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс  $C$  и относительного – вращения вокруг точки  $C$ ), по теореме Кенига получим

$$E_k = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2 \quad \text{Или} \quad E_k = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные центральные оси инерции тела.

## 1.10. Некоторые случаи вычисления работы.

1) **Работа сил тяжести, действующих на систему.** Работа силы тяжести, действующей на частицу весом  $p_k$ , будет равна  $p_k(z_{k0} - z_{k1})$ , где  $z_{k0}$  и  $z_{k1}$  - координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum p_k z_{k0} - \sum p_k z_{k1} = P(z_{k0} - z_{k1}) = \pm Ph_c$$

где  $P$  - вес системы,  $h_c$  - вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, **работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей  $P$  на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.**

2) **Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.** Элементарная работа приложенной к телу силы  $F$  (рис.13) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi$$

Так как  $ds = h d\varphi$  где  $d\varphi$  - угол поворота тела.

Но, как легко видеть,  $F_\tau h = m_z(\vec{F})$ . Будем называть величину  $M_z = m_z(\vec{F})$  **вращающим моментом**. Тогда получим:  $dA = M_z d\varphi$ .

Следовательно, в рассматриваемом случае **элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота**. Формула справедлива и при действии нескольких сил, если считать  $M_z = m_z(\vec{F})$ .

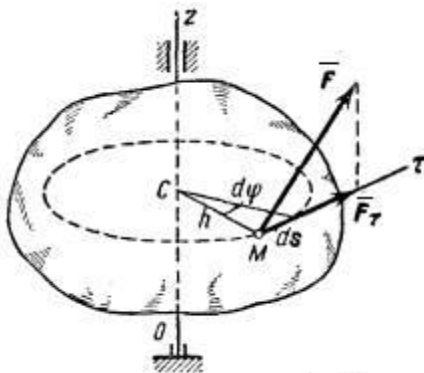


Рис.13

При повороте на конечный угол  $\varphi_1$  Работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси  $Oz$ , то  $M_z$  будет, очевидно, означать момент этой пары.

Работа, затрачиваемая на изменение скорости вращения, равна изменению кинетической энергии тела:

$$A = \Delta E_k = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело **мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела**. При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

Если тело катится по горизонтальной поверхности, его кинетическая энергия будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения (рис.14):

$$E_k = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}I_p\omega^2$$

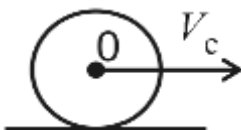


Рис.14

3) **Работа сил трения, действующих на катящееся тело**. На колесо радиуса  $R$  (рис.15), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения  $F$ , препятствующая скольжению точки касания  $B$  вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы  $dA = -F_{\text{тр}} ds_B$ . Но точка  $B$  в данном

случае является мгновенным центром скоростей и  $V_B=0$ . Так как  $ds_B = V_B dt$ , то  $ds_B = 0$  и для каждого элементарного перемещения  $dA = 0$ .

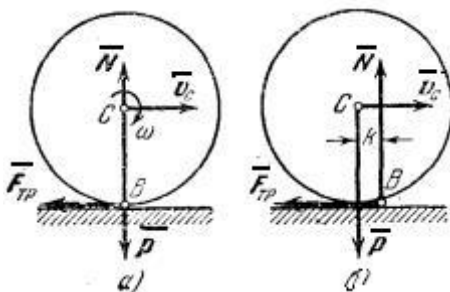


Рис.15

Следовательно, **при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.** По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции  $N$ , если считать тела недеформируемыми и силу  $N$  приложенной в точке  $B$  (как на рис. 14,а).

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис. 182,б), создает пару  $(\vec{N}, \vec{P})$  момент которой  $M = kN$ , где  $k$ - коэффициент трения качения. Тогда получим:

$$dA^{\text{Кач}} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R}Nds_c$$

где  $Nds_c$  – элементарное перемещение центра  $C$  колеса.

Так как величина  $k/R$  мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

### 1.11. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой  $m_i$ , имеющую скорость  $V_i$ , то для этой точки будет

$$d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = dA_i^e + dA_i^k$$



Где  $dA_i^e$  и  $dA_i^k$  - элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d\left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2}\right) = \sum dA_i^e + \sum dA_i^k$$

Или

$$dE_k = \sum dA_i^e + \sum dA_i^k$$

Равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если полученное выражение отнести к элементарному промежутку времени, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, можно получить вторую формулировку для дифференциальной формы теоремы: производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних ( $N^e$ ) и внутренних ( $N^k$ ) сил, т.е.

$$\frac{dE_k}{dt} = N^e + N^k$$

Дифференциальными формами теоремы об изменении кинетической энергии можно воспользоваться для составления дифференциальных уравнений движения, но это делается достаточно редко, потому что есть более удобные приемы.

Проинтегрировав обе части равенства в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна  $T_0$ , в положение, где значение кинетической энергии становится равным  $T_1$ , будем иметь

$$E_{k1} - E_{k0} = \sum A_i^e + \sum A_i^k$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: **изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.**

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях не исключаются.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволит исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) **Неизменяемая система.** **Неизменяемой** будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

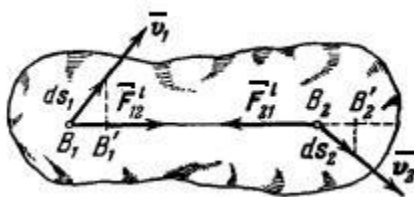


Рис.16

Пусть две точки  $B_1$  и  $B_2$  неизменяемой системы (рис.15), действующие друг на друга с силами  $\vec{F}_{12}^i$  и  $\vec{F}_{21}^i$  ( $\vec{F}_{12}^i = -\vec{F}_{21}^i$ ) имеют в данный момент скорости  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Тогда за промежуток времени  $dt$  эти точки совершат элементарные перемещения  $ds_1 = \vec{v}_1 dt$  и  $ds_2 = \vec{v}_2 dt$ , направленные вдоль векторов  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Но так как отрезок  $B_1 B_2$  является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , а, следовательно, и перемещений  $ds_1$  и  $ds_2$  на направление отрезка  $B_1 B_2$  будут равны друг другу, т.е.  $B_1 B'_1 = B_2 B'_2$ . Тогда элементарные работы сил  $\vec{F}_{12}^i$  и  $\vec{F}_{21}^i$  будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что **для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю** и уравнения принимают вид

$$dE_k = \sum dA_i^e \quad \text{Или} \quad E_{k1} - E_{k0} = \sum A_i^e$$

2) **Система с идеальными связями.** Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на **активные и реакции связей**. Тогда

$$dE_k = \sum dA_i^a + \sum dA_i^r$$

где  $dA_i^a$  – элементарная работа действующих на  $k$ -ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а  $dA_i^r$  – элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA_i^r = 0$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют **идеальными**. Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dE_k = \sum dA_i^a \quad \text{Или} \quad E_{k1} - E_{k0} = \sum A_i^a$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних **активных сил**

Механическая система называется **консервативной** (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется), если для нее имеет место интеграл энергии

$$E = E_k + E_n = const \quad \text{или} \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Это есть **закон сохранения механической энергии**: *при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной.*

Или

**В замкнутой системе энергия может переходить из одних видов в другие и передаваться от одного тела к другому, но ее общее количество остается неизменным.**

Это один из фундаментальных законов природы. Он подтверждает положение материализма о том, что движение является неотъемлемой частью материи, что оно неуничтожимо, а лишь преобразуется из одной формы в другую. Согласно всеобщему закону сохранения и превращения энергии уменьшение или увеличение полной механической энергии системы в точности компенсируется увеличением или уменьшением какого-либо другого вида энергии.

Энергия никуда не исчезает и не появляется вновь, а лишь переходит от одного тела к другому или превращается из одного вида в другой.

Механическая система будет консервативной, если действующие на нее силы потенциальны, например сила тяжести, силы упругости. В консервативных механических системах с помощью интеграла энергии можно проводить проверку правильности составления дифференциальных уравнений движения. Если система консервативна, а условие не выполняется, значит при составлении уравнений движения допущена ошибка.

В замкнутой системе тел, силы взаимодействия в которой консервативные, взаимные превращения механической энергии в другие виды отсутствуют. Такие системы называются **замкнутыми консервативными системами**.

Интегралом энергии можно воспользоваться для проверки правильности составления уравнений и другим способом, без вычисления производной. Для этого следует после проведения численного интегрирования уравнений движения вычислить значение полной механической энергии для двух различных моментов времени, например, начального и конечного. Если разница значений окажется сопоставимой с погрешностями вычислений, это будет свидетельствовать о правильности используемых уравнений.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### 2.1. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений устанавливает необходимое и достаточное условие равновесия механической системы материальных тел. Его можно сформулировать следующим образом:

Для равновесия механической системы с идеальными связями, находящейся под действием активных сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил равнялась нулю на любом возможном перемещении системы из предполагаемого положения равновесия, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0.$$

#### 2.1.1. Прямая и обратная теорема Лагранжа

Приведем доказательство принципа возможных перемещений.

Теорема (выражающая необходимость принципа). Если механическая система с идеальными связями находится в равновесии, то сумма элементарных работ всех активных сил на данном возможном перемещении системы равна нулю.

Пусть система находится в равновесии; тогда, очевидно, каждая точка  $M_i$  этой системы также находится в равновесии, т.е.

Равнодействующая  $\bar{F}_i$  всех активных сил, приложенных к точке, уравнивается равнодействующей  $\bar{R}_i$  сил реакций связей, ограничивающих свободу перемещений этой точки, т.е.

$$\bar{F}_i + \bar{R}_i = 0.$$

Умножая скалярно на  $\delta \bar{r}_i$  получим

$$\bar{F}_i \delta \bar{r}_i + \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0.$$

Суммируя соотношения, будем иметь:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

Так как связи идеальные, то  $\sum_{i=1}^n \bar{R}_i \delta \bar{r}_i = 0$ , следовательно, если система находится в равновесии, то необходимо, чтобы

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

Т.е. При равновесии механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил, действующих на систему, на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

**Обратная теорема (выражающая достаточность принципа).** Если сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы с идеальными связями равна нулю, то система находится в равновесии.

Предположим противное, т.е. Что сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

А система в рассматриваемом положении не находится в равновесии. Тогда каждая точка  $M_i$  этой системы также не будет находиться в равновесии, т.е. Равнодействующая  $\bar{F}_i$  всех активных сил, приложенных к точке, не будет уравниваться равнодействующей  $\bar{R}_i$  сил реакций идеальных связей, т.е.

$$\overline{F}_i + \overline{R}_i = \overline{R}_i^* \neq 0.$$

где  $\overline{R}_i^*$  – равнодействующая активных сил  $\overline{F}_i$  и сил реакций  $\overline{R}_i$ . Так как точки  $M_i$  системы начинают двигаться из состояния покоя, то действительные перемещения точек за время  $dt$  будут направлены по соответствующим равнодействующим  $\overline{R}_i^*$ . Выберем возможные перемещения точек системы так, чтобы они совпали с действительными перемещениями за время  $dt$ ; тогда

$$\sum_{i=1}^n \overline{R}_i^* \delta \vec{r}_i > 0$$

Или

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}_i \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \overline{R}_i \delta \vec{r}_i > 0.$$

Так как связи идеальные, то

$$\sum_{i=1}^n \overline{R}_i \delta \vec{r}_i = 0,$$

А потому неравенство принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \overline{F}_i \delta \vec{r}_i > 0.$$

Так как противоречит условия, то предположение, что система не находится в равновесии, неверно. Значит, система с идеальными связями находится в равновесии.

Таким образом, две теоремы Лагранжа доказывают необходимость и достаточность принципа возможных перемещений.

Аналитическое выражение принципа возможных перемещений может иметь одну из трех форм:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \bar{r}_i = 0$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^n (\bar{F}_{ix} \delta x_i + \bar{F}_{iy} \delta y_i + \bar{F}_{iz} \delta z_i) = 0$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta S_i \cos \alpha = 0$$

Форма получается из , если  $\bar{F}_i = \bar{F}_{ix} \bar{i} + \bar{F}_{iy} \bar{j} + \bar{F}_{iz} \bar{k}$  ,  
 $\delta \bar{r}_i = \delta x_i \bar{i} + \delta y_i \bar{j} + \delta z_i \bar{k}$  , а из по определению скалярного про-  
 изведения двух векторов  $\bar{F}_i$  и  $\delta \bar{r}_i$  .

### 2.1.2. Применение принципа возможных перемещений к выводу уравнений равновесия свободного твердого тела

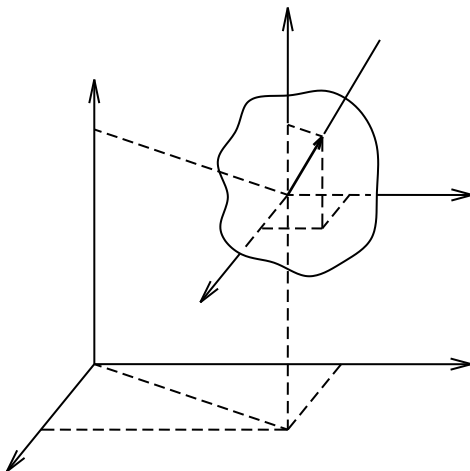


Рис.17

Прежде всего напомним, что в кинематике рассматривается общий случай движения свободного твердого тела, когда оно мо-



жет перемещаться как угодно по отношению к некоторой неподвижной системе отсчета  $O_1xyz$  (рис.17). Чтобы установить вид уравнений, определяющих закон рассматриваемого движения, выбирают точку  $O$  тела в качестве полюса и проводят через нее оси  $Oxyz$ , которые при движении тела будут перемещаться с полюсом поступательно и параллельно неподвижным осям  $O_1xyz$ . Тогда положение тела в неподвижной системе отсчета  $O_1xyz$  будет известно, т.е. Координаты  $x_o, y_o, z_o$ , и положение тела по отношению к осям подвижной системы  $Oxyz$ , определяемое углом поворота вокруг мгновенной оси  $OP$ . Следовательно, уравнения движения свободного твердого тела, позволяющие найти его положение по отношению к неподвижной системе отсчета в любой момент времени, имеют вид

$$\begin{aligned} x_o &= f_1(t); \quad y_o = f_2(t); \quad z_o = f_3(t) \\ \varphi_x &= f_4(t); \quad \varphi_y = f_5(t); \quad \varphi_z = f_6(t). \end{aligned}$$

Всего уравнений шесть, т.е. Столько, сколько степеней свободы. Значит, в любой момент времени  $t$  можно определить шесть обобщенных сил, действующих на тело.

Пользуясь принципом возможных перемещений, выведем условия равновесия свободного твердого тела под действием заданной системы сил  $\{\bar{F}_i\} \propto 0$ .

Заметим, что возможное перемещение любой точки  $M_i$  тела равно геометрической сумме поступательного и вращательного перемещений:

$$\delta \bar{r}_i = \delta \bar{r}_o + \delta \bar{\varphi} \times \bar{r}_i,$$

где  $\bar{r}_i$  – радиус-вектор точки  $M_i$ ,  $\bar{r}_o$  – радиус-вектор произвольно выбранного полюса  $O$  и  $\delta \bar{\varphi}$  – вектор возможного поворота тела вокруг мгновенной оси  $OP$ .

Пусть в точках  $M_i$  с радиусами-векторами  $\vec{r}_i$  приложены силы  $\vec{F}_i$ , тогда по принципу возможных перемещений будем иметь условия равновесия

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0,$$

Подставляя, получим:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_o + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i (\delta \varphi \times \vec{r}_i) = 0$$

Или

$$\delta \vec{r}_o \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \delta \varphi \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0,$$

Так как  $\delta \vec{r}_o$  и  $\delta \varphi$  не зависят от индекса суммирования  $i$ , кроме того, в смешанном векторно-скалярном произведении можно делать круговую перестановку множителей, т.е.

$$\vec{F}_i (\delta \varphi \times \vec{r}_i) = \delta \varphi (\vec{r}_i \times \vec{F}_i).$$

Возможные перемещения  $\delta \vec{r}_o$  и  $\delta \varphi$  независимы между собой, и, следовательно, из получим необходимые и достаточные условия равновесия свободного твердого тела, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Это – известные из статики условия равновесия системы сил, т.е. Условия равенства нулю главного вектора и главного момента приложенных сил относительно произвольно выбранного центра приведения.

Исходя из , можно легко получить уравнения равновесия в декартовой системе координат. Для этого представим силы и моменты сил в виде:

$$\begin{aligned}\bar{F}_i &= X_i \bar{i} + Y_i \bar{j} + Z_i \bar{k}; \\ \bar{M}_{oi} &= \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = (y_i Z_i - z_i Y_i) \bar{i} + (z_i X_i - x_i Z_i) \bar{j} + (x_i Y_i - y_i X_i) \bar{k} = \\ &= m_{xi} \bar{i} + m_{yi} \bar{j} + m_{zi} \bar{k} .\end{aligned}$$

Условия дают уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n X_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0; \\ \sum_{i=1}^n m_{xi} &= 0, \quad \sum_{i=1}^n m_{yi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_{zi} = 0.\end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения для плоской системы сил, надо положить равными нулю  $Z_i$  и  $z_i$ ; тогда получим:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_{oi} = 0;$$

Вывод этих уравнений из принципа возможных перемещений несколько не похож на вывод в статике, основанный на теории пар сил. В случае определения опорных реакций одной балки задача так проста, что не стоит применять принцип возможных перемещений. Не то будет в случае сложной системы тел; как покажем в

следующем параграфе, там применение принципа возможных перемещений является исключительно удобным и практически необходимым.

## 2.2. Общее уравнение динамики

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения динамических задач. Следовательно, применяя одновременно оба эти принципа, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  материальных точек, на которую наложены идеальные геометрические связи. Обозначим массу какой-нибудь  $k$ -й точки через  $m_k$ , а ускорение – через  $\bar{a}_k$ . Пусть равнодействующая всех приложенных к этой точке активных сил (внешних и внутренних) равна  $\bar{F}_k^{(a)}$ , а равнодействующая всех сил реакций –  $\bar{R}_k$ . Присоединим к этим силам силу инерции

$$\bar{F}_k^{un} = -m_k \bar{a}_k.$$

В результате получим уравновешенную систему сил. Следовательно,

$$\bar{F}_k^{(a)} + \bar{R}_k + \bar{F}_k^{un} = 0.$$

Аналогичные равенства получим для всех точек системы. Сообщим теперь точкам системы возможные перемещения  $\delta \bar{r}_k$ . Тогда, умножая каждое равенство (6.1) скалярно на соответствующее перемещение  $\delta \bar{r}_k$  и складывая затем полученные выражения, находим:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{R}_k + \bar{F}_k^{un}) \delta \bar{r}_k = 0.$$

Но сумма элементарных работ сил реакций идеальных связей

равна нулю  $\sum_{k=1}^n \bar{R}_k \delta r_k = 0$ . Следовательно, окончательно находим:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k^{(a)} + \bar{F}_k^{un}) \delta \bar{r}_k = 0$$

Равенство и представляет собой общее уравнение динамики.

Из него следует, что при движении системы с идеальными уравнивающими связями сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Если раскрыть стоящие под знаком суммы скалярные произведения, то можно общее уравнение динамики представить еще в виде:

$$\sum_{k=1}^n [(\bar{F}_{kx}^{(a)} + \bar{F}_{kx}^{un}) \delta x + (\bar{F}_{ky}^{(a)} + \bar{F}_{ky}^{un}) \delta y + (\bar{F}_{kz}^{(a)} + \bar{F}_{kz}^{un}) \delta z] = 0$$

Общее уравнение динамики, как и принцип возможных перемещений, можно применить и в случае, когда на систему наложены связи с трением; при этом силы трения включаются в число активных сил.

### 2.3. Принцип Даламбера для системы.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  материальных точек с массами  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ . Обозначим равнодействующую всех внешних сил, действующих на точку с массой  $m_k$ , через  $\bar{F}_k^{(e)}$ , а равнодействующую всех внутренних сил через  $\bar{F}_k^{(i)}$ . Тогда, если к этим силам добавить силу инерции

$$\bar{F}_k^{un} = -m_k \bar{a}_k,$$

То, согласно принципу Даламбера для одной точки, система сил  $\bar{F}_k^{(e)}$ ,  $\bar{F}_k^{(i)}$ ,  $\bar{F}_k^{un}$  будет уравновешенной и, следовательно,

$$\bar{F}_k^{un} + \bar{F}_k^{(e)} + \bar{F}_k^{(i)} = 0.$$

Применяя аналогичные рассуждения к каждой точке  $T_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ), придем к принципу Даламбера для системы.

Если к каждой точке механической системы в любой момент времени приложить кроме внешних и внутренних сил, еще воображаемую силу инерции, то получим уравновешенную систему сил, к которой применимы все условия и уравнения равновесия статики.

Написав условия равновесия приложенных сил и сил инерции для каждой точки системы, получим:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1^{un} + \bar{F}_1^{(i)} + \bar{F}_1^{(e)} &= 0, \\ \bar{F}_2^{un} + \bar{F}_2^{(i)} + \bar{F}_2^{(e)} &= 0, \\ \bar{F}_3^{un} + \bar{F}_3^{(i)} + \bar{F}_3^{(e)} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{F}_n^{un} + \bar{F}_n^{(i)} + \bar{F}_n^{(e)} &= 0. \end{aligned}$$

Система выражает принцип Даламбера аналитически. Из нее можно получить уравнения, не содержащие наперед неизвестные внутренние силы. Складывая почленно равенства (5.10) и замечая, что геометрическая сумма всех внутренних сил системы равна нулю, получим:

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} = 0.$$

Обозначая радиус-векторы точек системы через  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$  и умножая обе части первого из равенств (5.10) векторно на  $\bar{r}_1$ , второе – на  $\bar{r}_2$  и т.д., а затем суммируя эти равенства почленно, получим:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_n^{(e)} + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{F}_n^{un} = 0$$

Или

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_n^{(e)}) + \sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_n^{un}) = 0$$

Выводим уравнения равновесия пространственной системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^{un} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^{un} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{kz}^{un} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_x(F_n^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_x(F_n^{un}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_y(F_n^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_y(F_n^{un}) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_z(F_n^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_z(F_n^{un}) = 0$$

И уравнивая равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{kx}^{un} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky}^{(e)} + \sum_{k=1}^n F_{ky}^{un} = 0$$

$$\sum_{k=1}^n m_o(F_n^{(e)}) + \sum_{k=1}^n m_o(F_n^{un}) = 0$$

Система уравнений аналогична уравнениям, выражающим необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твердого тела.

Таким образом, вытекающие из принципа Даламбера уравнения позволяют решить до конца задачу динамики только для абсолютно твердого тела.

Значение принципа Даламбера состоит в том, что он дает единый метод составления уравнений движения любой механической системы. Особенно эффективно это принцип может быть использован для решения задач динамики в соединении с принципом возможных перемещений, выражающим в весьма общей форме условия равновесия механической системы.

Для дальнейшего будет полезно ввести обозначения:

$$\bar{R}^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un}, \quad \bar{M}_o^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{un})$$

Величины  $\bar{R}^{un}$ ,  $\bar{M}_o^{un}$  представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра  $O$  системы сил инерции. В результате получим из (5.11) и (5.13) :

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{(e)} + \bar{R}^{un} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{(e)}) + \bar{M}_o^{un} = 0$$

Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражения главного вектора и главного момента сил инерции.

Определим величину главного вектора сил инерции.

Имеем



$$\bar{R}^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} = - \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k$$

Так как в любой момент времени положение центра масс движущейся механической системы материальных точек или тела определяется по формуле ,то

$$M\ddot{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \ddot{r}_k$$

Или

$$M\bar{a}_c = - \sum_{k=1}^n m_k \bar{a}_k$$

Будем иметь

$$\bar{R}^{un} = -M\bar{a}_c$$

Следовательно, главный вектор сил инерции тела, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Если центр масс тела движется по некоторой кривой, то

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n$$

Тогда

$$\bar{R}^{un} = -M\bar{a}_c^\tau - M\bar{a}_c^n$$

Значит главный вектор сил инерции можно представить в виде двух составляющих:

$$\bar{R}_\tau^{ин} = -M\bar{a}_c^\tau; \bar{R}_n^{ин} = -M\bar{a}_c^n.$$

Теперь определим выражение главного момента сил инерции.

Пусть некоторое плоское твердое тело вращается вокруг вертикальной оси  $Oz$  (рис. 18). Выберем какую-нибудь точку тела с массой  $m_k$ . При вращении тела эта точка движется с ускорением

$$\bar{a}_k = \bar{a}_k^\tau + \bar{a}_k^n,$$

А сила инерции ее будет состоять из двух составляющих:

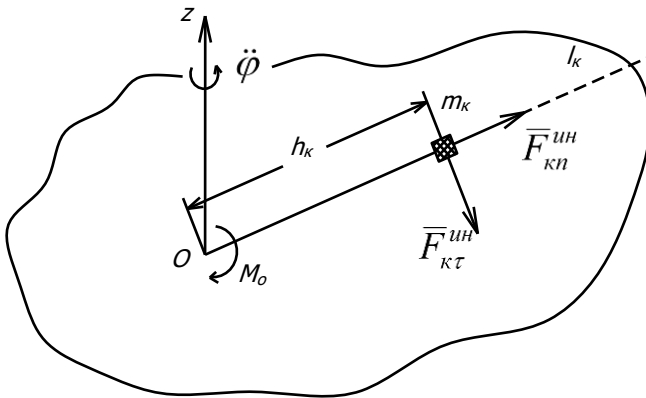


Рис.18

$$\bar{F}_{k\tau}^{ин} = -m_k \bar{a}_k^\tau, \bar{F}_{kn}^{ин} = -m_k \bar{a}_k^n.$$

При этом линией действия силы  $\bar{F}_{kn}^{ин}$  является прямая  $l_k$ , а потому ее момент относительно точки  $O$  равен нулю.

Так как

$$\bar{a}_k^\tau = \ddot{\phi} h_k,$$

То

$$m_o(\bar{F}_{k\tau}^{un}) = -\ddot{\phi} h_k^2 m_k.$$

Суммируя моменты всех элементарных сил инерции и вынося за скобки общий множитель  $\ddot{\phi}$ , получим

$$M_o^{un} = \sum m_o(\bar{F}_{k\tau}^{un}) = -\ddot{\phi} \sum h_k^2 m_k.$$

Принимая во внимание формулу (1.2), окончательно находим выражение главного момента сил инерции:

$$M_o^{un} = -J_z \ddot{\phi}.$$

Следовательно, главный момент сил инерции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $Oz$  равен произведению момента инерции  $J_z$  тела на угловое ускорение  $\ddot{\phi}$  и направлен противоположно этому ускорению.

С помощью принципа Даламбера весьма просто и наглядно решаются те задачи динамики, в которых, зная движение системы или твердого тела, нужно определить реакции наложенных связей. При этом из рассмотрения будут исключены все наперед неизвестные внутренние силы. В случаях, когда нужно определить реакции внутренних связей, систему следует расчленить на такие части, по отношению к которым искомые силы будут силами внешними.

Кроме того, принцип Даламбера может быть использован при решении основной задачи динамики для составления дифференциальных уравнений движения системы. При этом с помощью принципа Даламбера легко решаются многие задачи, в которых требуется определить ускорение поступательно движущихся тел системы.

## 2.4. Уравнения Лагранжа второго рода.

Из общего уравнения динамики можно получить дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах, дающие весьма общий и в то же время достаточно простой метод решения динамических задач.

Рассмотрим систему  $n$  материальных точек, на которые действуют активные силы  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ . Пусть положения точек

системы относительно инерциальных осей координат определяются радиусами-векторами  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ . Тогда общее уравнение динамики для рассматриваемой системы будет иметь вид:

$$\sum_{k=1}^n (\bar{F}_k + \bar{F}_k^{un}) \delta \bar{r}_k = 0$$

Если система имеет  $s$  степеней свободы, то ее положение может быть однозначно определено обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_s$ . Тогда, как было показано, радиус-вектор любой точки системы  $\bar{r}_k$  можно выразить через обобщенные координаты

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

И для  $\delta \bar{r}_k$  получается выражение:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \delta q_s$$

Подставляя эти значения  $\delta \bar{r}_k$  в уравнение и вынося общие множители за скобки, получим:

$$\left[ \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right] \delta q_1 + \left[ \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \right] \delta q_2 + \dots + \left[ \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \right] \delta q_s = 0.$$

Первые слагаемые в квадратных скобках представляют собой обобщенные активные силы  $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ . Вторые слагаемые в квадратных скобках назовем по аналогии обобщенными силами инерции

$$Q_1^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_s^{un} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{un} \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s}$$

Тогда уравнение (7.11) представим в виде:

$$(Q_1 + Q_1^{un})\delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{un})\delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^{un})\delta q_s = 0.$$

Так как  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$  между собой независимы, то равенство (7.13) может быть выполнено только, когда каждый из коэффициентов при  $\delta q_i$  в отдельности равен нулю. Отсюда находим:

$$Q_1 + Q_1^{un} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{un} = 0, \quad \dots, \quad Q_s + Q_s^{un} = 0.$$

Это – уравнения движения системы, которыми мы уже пользовались при решении задач в 6.2. Неудобство этих уравнений, как указывалось, состоит в том, что для систем, тела которых движутся не поступательно, усложняется подсчет обобщенных сил инерции.

Покажем, что величины обобщенных сил инерции любой системы могут быть легко найдены, если известно выражение кинетической энергии этой системы. Наличие такой зависимости значительно облегчает весь ход решения, так как для подсчета кинетической энергии системы мы имеем достаточно простые готовые

формулы. Начнем с преобразования выражения  $Q_1^{un}$ . Замечая, что

$$\bar{F}_k^{un} = -m_k \bar{a}_k = -m_k \ddot{\bar{r}}_k,$$

Получим

$$Q_1^{un} = -\sum_{k=1}^n m_k \ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}.$$

Так как кинетическая энергия выражается через скорости точек системы, то для получения искомого выражения  $Q_1^{un}$  надо преобразовать правую часть так, чтобы в нее вместо  $\bar{r}_k$  и  $\ddot{\bar{r}}_k$  вошли только  $\dot{\bar{r}}_k$ . Прежде чем заметим, что

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right),$$

В чем легко убедиться непосредственно дифференцированием.

Но так как порядок дифференцирования функции можно менять, то

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_1}.$$

Остается преобразовать производную от  $\bar{r}_k$  по  $q_1$  в первом члене правой части. Для этого, замечая, что  $\bar{r}_k$  есть функция обобщенных координат, возьмем полную производную  $\bar{r}_k$  по времени. Получим

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s.$$

Так как  $\bar{r}_k$  есть функция  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , то и частные производные от  $\bar{r}_k$  по обобщенным координатам также функции только  $q_1, q_2, \dots, q_s$ . Само же  $\dot{\bar{r}}_k$  будет, как видно из равенства, функцией и обобщенных координат, и обобщенных скоростей, которые входят множителями при частных производных:

$$\dot{\bar{r}}_k = \dot{\bar{r}}_k(q_1, q_2, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s).$$

Возьмем теперь частную производную от левой и правой частей равенства по  $\dot{q}_1$ . Так как  $\dot{q}_1$  входит только множителем в первое слагаемое, то получим:

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}.$$

Заменяя теперь частные производные в правой части равенства их значениями, получим:

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left( \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \dot{\bar{r}}_k \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial q_1}$$

$$\ddot{\bar{r}}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \frac{\dot{r}^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{\dot{r}_k^2}{2} \right).$$

Или

Подставляя эти значения в равенство (7.15) и замечая, что сумма производных равна производной от суммы, а  $\dot{\bar{r}}_k = \bar{v}_k$ , находим

$$Q_1^{ин} = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} \right).$$

Аналогичные выражения получим для остальных обобщенных сил инерции. Но величины сумм, стоящих в квадратных скобках, равны по определению кинетической энергии системы. В результате получим следующие выражения обобщенных сил инерции через кинетическую энергию системы:

$$Q_1^{un} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_1}, \quad Q_2^{un} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_2}, \dots$$

$$Q_s^{un} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_s}.$$

Подставляя найденные значения  $Q_i^{un}$  в равенства и перенося в них  $Q_i$  в правые части, найдем окончательно:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

.....

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s$$

Эти  $s$  уравнений представляют собой дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах; они впервые были получены Лагранжем в его «Аналитической механике» и потому называются уравнениями Лагранжа. Важно обратить внимание на то, что, во-первых, число уравнений Лагранжа равно числу независимых обобщенных координат данной системы, т.е. равно числу ее степеней свободы, и, во-вторых, что неизвестные реакции идеальных связей, наложенных на систему, в эти уравнения не входят. Уравнения Лагранжа представляют собой систему  $s$  дифференциальных уравнений второго порядка с  $s$  независимыми функциями  $q_1, q_2, \dots, q_s$ .

Основная задача динамики в обобщенных координатах ставится так: зная обобщенные силы системы  $Q_i$  и начальные условия (начальные значения обобщенных координат  $q_{i0}$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_{i0}$ ), определить закон движения системы, т.е. найти обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_s$  как функции времени.



Решение задачи сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений второго порядка. Интегралы этих уравнений будут содержать  $2s$  постоянных интегрирования, которые определяются по  $2s$  начальным условиям: при  $t = 0$   $q_i = q_{i0}$ ,  $\dot{q}_i = \dot{q}_{i0}$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ).

Уравнения позволяют также, зная закон движения системы в обобщенных координатах, т.е.  $Q_i$  как функции времени, определить обобщенные силы.

Преимущество полученных уравнений состоит в том, что они дают единый и простой метод решения задач динамики для любой системы точек или системы тел, как угодно движущихся. При этом число дифференциальных уравнений движения не зависит от числа входящих в систему тел (или точек) и равно числу степеней свободы системы. Другим большим преимуществом этих уравнений является то, что они позволяют решать задачи для систем с идеальными связями на основании учета действия одних только активных сил; наперед неизвестные реакции связей при этом автоматически исключаются из уравнений.

Уравнениями можно пользоваться и в случаях, когда на систему наложены связи с трением, включая силы трения в число активных сил.

Отметим в заключение, что все те дифференциальные уравнения движения материальной точки или твердого тела, которые были получены из основного закона динамики или из общих теорем классической механики, можно получить с помощью уравнений Лагранжа.

Покажем, например, как с помощью уравнения получить дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы. Выберем за обобщенную координату угол поворота  $\varphi$ . Движение тела описывается одним из уравнений из системы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1$$

Найдем сначала  $Q_1$ . Элементарная работа приложенных сил при повороте тела на угол  $\delta\varphi$

$$\delta A = M \delta \varphi,$$

где  $M$  – сумма моментов всех внешних сил относительно оси вращения  $z$ . Следовательно,  $Q_1 = M$ . Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Подставляя все найденные значения в записанное выше уравнение, получим:

$$J \ddot{\varphi} = M.$$

Это и есть дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела. Аналогично можно получить дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела и т.д.

### 2.4.1. Случай потенциальных сил

Рассмотрим случай, когда все действующие на систему силы потенциальны. Обобщенные силы можно выразить через силовую функцию  $U$ . Преобразуем сначала первое из уравнений. Заменяя в нем  $Q_1$  его значением, получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial (T + U)}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial (T + U)}{\partial q_1} = 0.$$

Или

Последнее равенство справедливо потому, что силовая функция является функцией только координат и от скоростей не зависит. Следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_1} = 0,$$

И от прибавления ее к левой части равенство не нарушилось. Аналогичным образом преобразуются остальные уравнения системы.

Введем новую функцию

$$L = T + U = T - \Pi,$$

Называемую функцией Лагранжа. Функция  $L$  представляет собой разность между кинетической и потенциальной энергиями системы и является функцией обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Тогда система примет окончательный вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= Q_1; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= Q_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} &= Q_s \end{aligned}$$

Уравнения представляют собой уравнения движения системы в обобщенных координатах в случае потенциальных сил.

## 2.5. Элементы теории удара.

**Ударом** будем называть кратковременное действие на тело некоторой силы  $\vec{F}$ . Силы, возникающей, например, при встрече двух массивных тел.

Опыт показывает, что взаимодействие их очень кратковременно (время контакта исчисляется тысячными долями секунды), а сила удара довольно велика (в сотни раз превышает вес этих тел). Да и сама сила – не постоянна по величине. Поэтому явление удара – сложный процесс, сопровождающийся к тому же деформацией

тел. Точное исследование его требует знания физики твердого тела, законов тепловых процессов, теории упругости и др. При рассмотрении столкновений необходимо знать форму тел, массы покоя, скорости движения и их упругие свойства.

При ударе возникают внутренние силы, значительно превышающие все внешние силы, которыми можно в этом случае пренебречь, поэтому соударяющиеся тела можно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения энергии и импульса. Кроме того, эта система консервативна, т.е. Внутренние силы консервативны, а внешние силы стационарны и консервативны. *Полная энергия консервативной системы не изменяется со временем.*

Мы же воспользуемся довольно простыми методами исследования, но которые, как подтверждает практика, достаточно правильно объясняют явление удара.

Поскольку сила удара  $\vec{F}$  Очень велика, а продолжительность его, время  $\tau$ , мало, при описании процесса удара будем пользоваться не дифференциальными уравнениями движения, а теоремой об изменении количества движения. Потому что измеряемой конечной величиной является не сила удара, а импульс ее  $\vec{S} = \int_0^\tau \vec{F} dt$

Чтобы сформулировать первые особенности явления удара, рассмотрим сначала действие такой силы на материальную точку.

Пусть к материальной точке  $M$ , движущейся под действием обычных сил  $\vec{F}_i$  По некоторой траектории (рис.18), в какой-то момент была приложена мгновенная, большая сила  $\vec{F}$ . С помощью теоремы об изменении количества движения за время удара  $\tau$  составим уравнение  $m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S}$

Где  $\vec{v}_2$  И  $\vec{v}_1$  – скорости точки в конце и в начале удара;  $\vec{S}$  – импульс мгновенной силы  $\vec{F}$ . Импульсами обычных сил, под действием которых точка двигалась, можно пренебречь – за время  $\tau$  они будут очень малы.

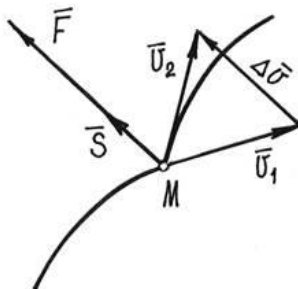


Рис.19

Из уравнения находим изменение скорости за время удара (рис.19):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{\vec{S}}{m}$$

Это изменение скорости оказывается конечной величиной.

Дальнейшее движение точки начнется со скоростью  $\vec{v}_2$  и продолжится под действием прежних сил, но по траектории, получившей излом.

Теперь можно сделать несколько выводов.

1. При исследовании явления удара обычные силы можно не учитывать.

2. Так как время  $\Delta t$  мало, перемещением точки за время удара можно пренебречь.

3. Единственный результат действия удара – только изменение вектора скорости.

### ***Прямой центральный удар двух тел.***

Удар называется **прямым и центральным**, если центры масс тел до удара двигались по одной прямой, по оси  $x$ , точка встречи их поверхностей оказывается на этой же прямой и общая касательная  $T$  к поверхностям будет перпендикулярна оси  $x$  (рис.20).

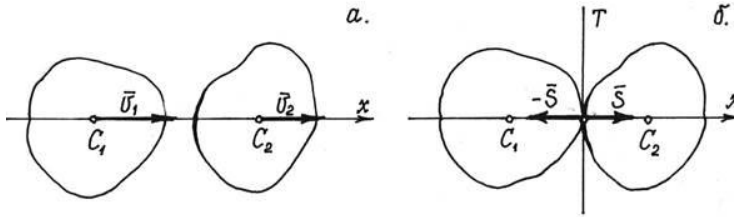


Рис.20

Если касательная  $T$  не перпендикулярна этой оси, удар называется **косым**

Пусть тела двигались поступательно со скоростями их центров масс  $\vec{v}_2$  и  $\vec{v}_1$ . Определим каковы будут их скорости  $\vec{u}_2$  и  $\vec{u}_1$  После удара.

За время удара  $T$  на тела действуют ударные силы  $\vec{F}$ , импульсы  $\vec{S}$  Которых, приложенные в точке касания, показаны на рис.19,б. По теореме об изменении количества движения, в проекциях на ось  $x$ , получим два уравнения

$$\begin{cases} m_1(u_1 - v_1) = -s \\ m_2(u_2 - v_2) = s \end{cases}$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы тел;  $v_2, v_1, u_2$  и  $u_1$  – проекции скоростей на ось  $x$ .

Конечно, этих двух уравнений недостаточно для определения трех неизвестных. Нужно еще одно, которое, естественно, должно характеризовать изменение физических свойств этих тел в процессе удара, учитывать упругость материала и его диссипативные свойства.

**Рассмотрим сначала удар пластичных тел**, таких, которые по окончании удара не восстанавливают деформированный объем и продолжают двигаться как одно целое со скоростью  $u$ , т.е.  $u_1 = u_2 = u$ . Это и будет недостающее третье уравнение. Тогда имеем

$$\begin{cases} m_1(u - v_1) = -s \\ m_2(u - v_2) = s \end{cases}$$

Решив эти уравнения, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

## Теоретическая механика

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

Так как величина импульса  $S$  должна быть положительной, то для того чтобы произошел удар, требуется выполнение условия  $v_1 > v_2$ .

Нетрудно убедиться, что удар пластичных, неупругих тел сопровождается потерей их кинетической энергии.

Кинетическая энергия тел до удара

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

После удара

$$E_{k2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

Отсюда

$$E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} S (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

И, подставив значение импульса  $S$ , получим

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

Эта «потерянная» энергия расходуется на деформацию тел, на нагревание их при ударе, (можно убедиться, что после нескольких ударов молотком, деформированное тело сильно нагревается).

В абсолютно неупругом ударе закон сохранения механической энергии не выполняется, но выполняется закон сохранения импульса. Потенциальная энергия шаров не меняется, меняется только кинетическая энергия – она уменьшается. Уменьшение механической энергии рассматриваемой системы обусловлено деформацией тел, которая сохраняется после удара.

Перейдем теперь к удару упругих тел.

Ударный процесс таких тел происходит гораздо сложнее. Под действием ударной силы деформация их сначала увеличивается, увеличивается до тех пор пока скорости тел не уравниются. А затем, за счет упругости материала, начнется восстановление

формы. Скорости тел начнут изменяться, изменяться до тех пор пока тела не отделятся друг от друга.

Разделим процесс удара на две стадии: от начала удара до того момента, когда скорости их уравниваются и будут равными  $u$ ; и от этого момента до конца удара, когда тела разойдутся со скоростями  $u_2$  и  $u_1$ .

Для каждой стадии получим по два уравнения:

$$\begin{cases} m_1(u - v_1) = -S_1 \\ m_2(u - v_2) = S_1 \\ m_1(u_1 - u) = -S_2 \\ m_2(u_2 - u) = S_2 \end{cases}$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – величины импульсов взаимных реакций тел для первой и второй стадий.

Решая, получим

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

В уравнениях три неизвестные величины. Не хватает одного уравнения, которое опять должно характеризовать физические свойства этих тел.

Положим отношение импульсов  $S_2/S_1 = k$ . Это и будет дополнительное третье уравнение.

Опыт показывает, что величину  $k$  можно считать зависящей только от упругих свойств этих тел. (Правда, более точные эксперименты показывают, что есть некоторые зависимости и от их формы). Определяется этот коэффициент экспериментально для каждого конкретного тела. Называется он **коэффициентом восстановления скорости**. Величина его  $0 \leq k \leq 1$ . У пластичных тел  $k = 0$ , у абсолютно упругих тел  $k = 1$ .

Решая, теперь, уравнения, получим скорости тел после окончания удара.

$$u_1 = u + k(u - v_1) \quad \text{и} \quad u_2 = u + k(u - v_2)$$

Скорости имеют положительный знак, если они совпадают с положительным направлением оси, выбранной нами, и отрицательный – в противном случае.



Проанализируем полученные выражения для двух шаров различных масс.

$$1) \quad m_1 = m_2 \Rightarrow u_1 = \frac{2m_2 v_1}{2m_2} = v_1; \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{2m_1} = v_1$$

Шары равной массы «обмениваются» скоростями.

$$2) \quad m_1 > m_2, \quad v_2 = 0,$$

$U_1 < v_1$ , следовательно, первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью;

$U_2 > u_1$ , следовательно, скорость второго шара после удара больше, чем скорость первого после удара.

$$3) \quad m_1 < m_2, \quad v_2 = 0,$$

$U_1 < 0$ , следовательно, направление движения первого шара при ударе изменяется – шар отскакивает обратно.

$U_2 < v_1$ , следовательно, второй шар в ту же сторону, в которую двигался первый шар до удара, но с меньшей скоростью.

$$4) \quad m_2 \gg m_1 \text{ (например, столкновение шара со стенкой)}$$

$u_1 = -v_1$ ;  $u_2 \approx \frac{2m_1 v_1}{m_2} \approx 0$ , следовательно, получившее удар большое тело останется в покое, а ударившее малое тело отскочит с первоначальной скоростью в противоположную сторону.

Можно найти, как и при ударе пластичных тел, потерю кинетической энергии при ударе упругих тел.

$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2)$$

Заметим, что при ударе абсолютно упругих тел ( $k = 1$ ) кинетическая энергия не изменяется, не «теряется».